

ЛЕКЦИЯ 10

Глава 10. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

10.1. Способы построения линий пересечения

При пересечении многогранников может иметь место *проницание* одного многогранника другим (полное пересечение) и *врезание* (неполное пересечение).

При проницании получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоские (при проницании одной грани) и пространственные (при проницании двух и более граней). При врезании получается одна замкнутая пространственная ломаная линия пересечения.

Вершинами ломаной пересечения являются точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Звенья ломаной – это отрезки, по которым грани одного многогранника пересекают грани другого.

В соответствии с вышесказанным при решении задач используется один из следующих способов:

1) способ ребер, дающий возможность найти вершины ломаной линии пересечения (задачи на пересечение прямой линии с плоскостью);

2) способ граней, дающий возможность определить звенья ломаной линии пересечения (задачи на взаимное пересечение плоскостей).

Преимущество отдается тому из способов, который дает более простое решение. Иногда эти два способа целесообразно комбинировать. Следует отметить, что если проекция ребра одного многогранника не пересекает проекции контура другого, то данное ребро не пересекает другой многогранник. Однако пересечение проекций ребра одного многогранника с проекциями контура другого еще не означает, что ребро пересекает многогранник.

При определении видимости проекции линии пересечения следует учитывать, что видимой является та часть линии пересечения, которая находится на видимых проекциях граней обоих многогранников.

Рассмотрим случай пересечения пирамиды с призмой, боковая поверхность которой – фронтально-проецирующая (рис. 10.1).

Так как фронтальные проекции ребра AA_1 призмы и ребра SF пирамиды не пересекают контур другого многогранника, то при пересечении получается одна пространственная ломаная линия (случай врезания).

Грань AA_1B_1B призмы – горизонтальная плоскость α (α''), пересекающая боковую поверхность пирамиды по ломаной линии, звенья которой параллельны сторонам основания DEF пирамиды. По фронтальной проекции точки $1''$, расположенной на ребре SD пирамиды, найдем ее горизонтальную проекцию $1'$ и, проведя звенья ломаной линии, определим точки $2', 3', 4'$ ($1'2' \parallel D'E'$, $2'3' \parallel E'F'$, $1'4' \parallel D'F'$).

Горизонтальные проекции $5'$ и $6'$ точек пересечения ребер SE и SD с гранями призмы находятся с помощью линий связи. Горизонтальные проекции $7'$ и $8'$ точек пересечения ребра CC_1 призмы с поверхностью пирамиды определим с помощью горизонтальной плоскости β , проведенной через ребро CC_1 призмы.

Плоскость β (β') пересекает поверхность пирамиды по линиям, параллельным сторонам основания пирамиды. Спроецировав точку K , лежащую на ребре SD пирамиды, через проекцию K' проведем линии, параллельные $D'E'$ и $D'F'$. Эти линии пересекаются с горизонтальной проекцией ребра CC_1 призмы в точках $7'$ и $8'$.

Последовательно соединяя каждые пары точек пересечения одних и тех же граней отрезками прямых, получим замкнутую пространственную ломаную линию $1'2'3'5'7'6'8'4'1'$.

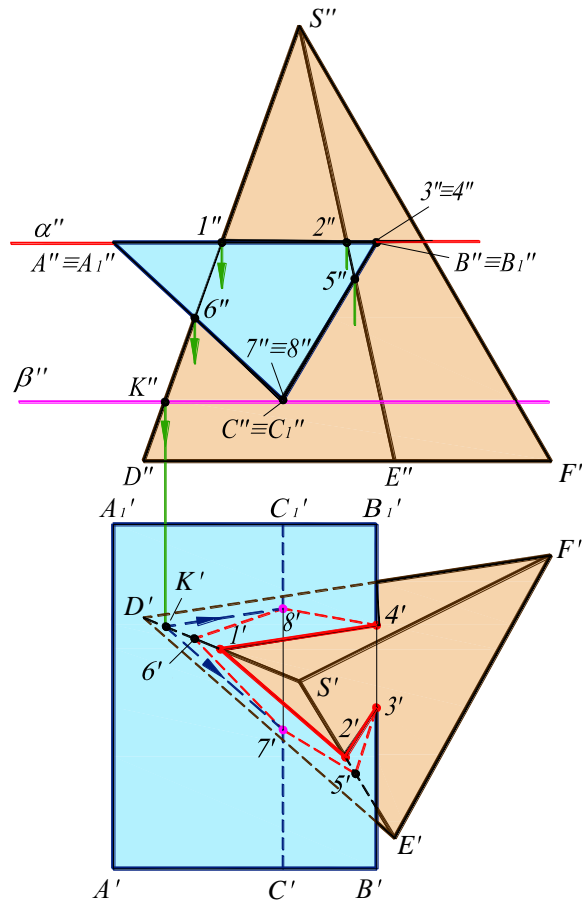


Рис. 10.1

Видимой будет часть этой линии $3'2'1'4'$, расположенная на видимой грани AA_1B_1B .

На рис. 10.2 показано построение линии пересечения двух призм, боковые поверхности которых являются проецирующими (для призмы $ABCA_1B_1C_1$ – горизонтально-проецирующая, для призмы $DEFD_1E_1F_1$ – профильно-проецирующая).

Рассматривая положение горизонтальных и профильных проекций многогранников, отмечаем, что призма $DEFD_1E_1F_1$ проникает в боковую поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$. Следовательно, при пересечении получают две замкнутые ломаные линии: одна из них – пространственная (пересекаются две грани призмы $ABCA_1B_1C_1$), другая – плоская (пересекается одна грань).

Горизонтальная проекция линий пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикальной призмы, а профильная – с профильной проекцией горизонтальной призмы.

Отмечая точки пересечения $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ горизонтальных проекций ребер $D'D_1', E'E_1', F'F_1'$ с горизонтальной проекцией призмы $ABCA_1B_1C_1$, при помощи линий связи находим их фронтальные проекции.

Фронтальные проекции $7'', 8''$ точек пересечения ребра AA_1 с боковой поверхностью призмы $DEFD_1E_1F_1$ определим по линиям связи, используя их профильные проекции $7'''$ и $8'''$.

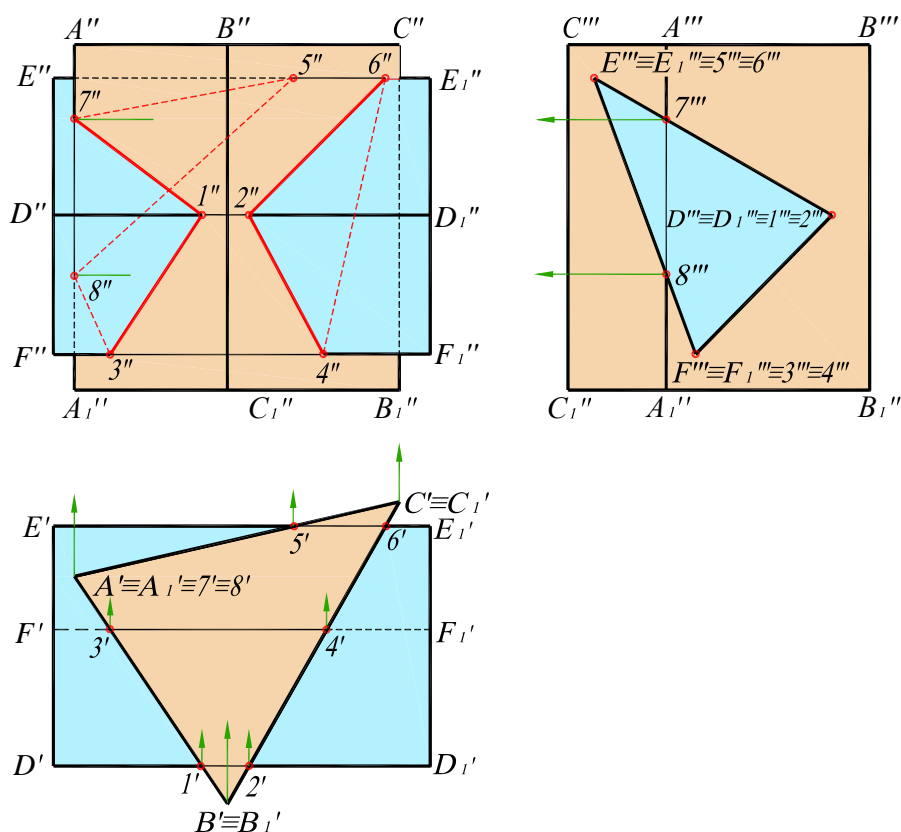


Рис. 10.2

Последовательно соединяя найденные точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, построим две ломаные линии 1–3–8–5–7–1 и 2–4–6–2.

Видимая часть линий пересечения расположена на видимых гранях обоих многогранников.

10.2. Примеры решения задач

Задача. Построить линию пересечения пирамиды с прямой призмой (рис. 10.3).

Решение. Рассматривая горизонтальные проекции многогранников, отметим, что имеет место проникание, так как все ребра пирамиды пересекаются поверхностью призмы. При этом одна из ломаных линий – плоская (поверхность пирамиды пересекается одной гранью призмы), другая – пространственная (в пересечении с пирамидой участвуют две грани призмы). Так как боковая поверхность призмы – горизонтально-проецирующая, то горизонтальные проекции точек пересечения $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ определяются в пересечении ребер пирамиды с боковыми гранями призмы. Их фронтальные проекции строятся с помощью линий связи на соответствующих ребрах пирамиды.

По горизонтальным проекциям многогранников видно, что только ребро EE_1 призмы пересекает грани пирамиды. Для определения точек пересечения его с пирамидой через это ребро и вершину S пирамиды проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость α (α'). Она пересекает грани пирамиды по прямым MS и NS . В пересечении фронтальных проекций $M''S''$ и $N''S''$ с проекцией $E''E_1''$ определяются точки пересечения (7 и 8) ребра EE_1 призмы с гранями SAB и SBC пирамиды.

Последовательно соединяя точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, получим линии пересечения 1–2–3 и 4–6–8–5–7–4.

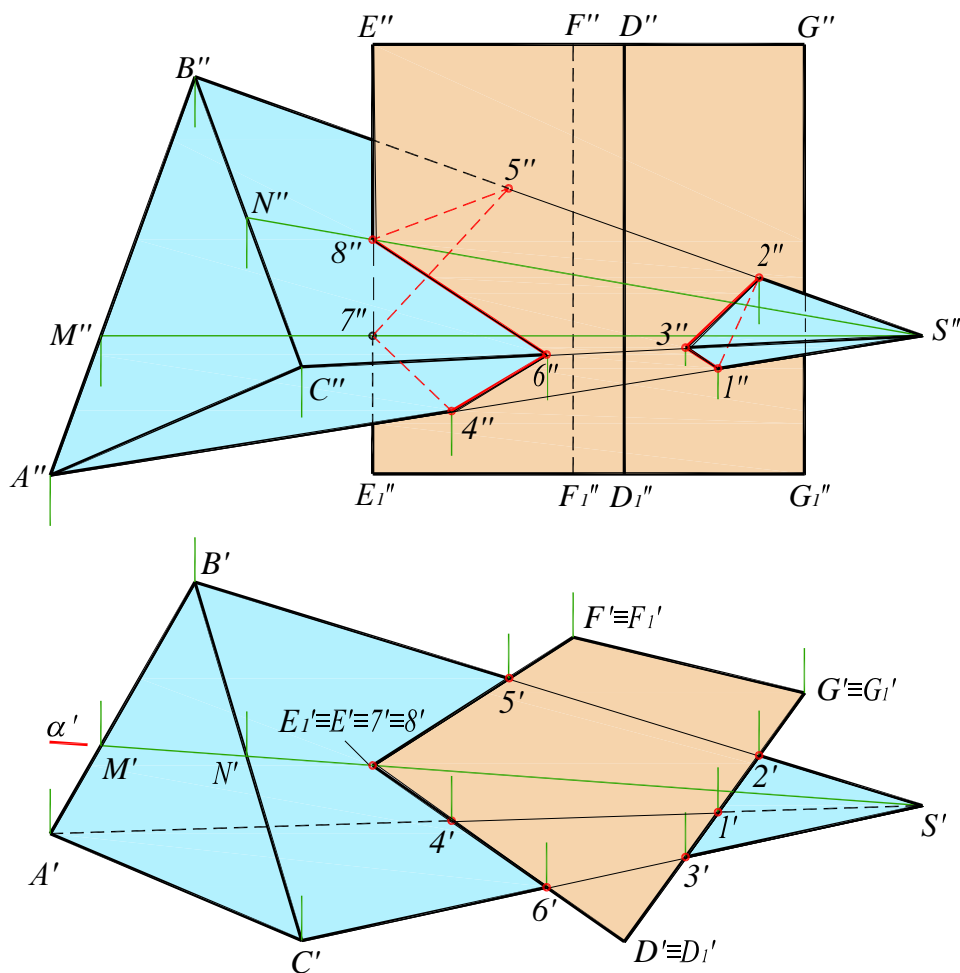


Рис. 10.3

Видимыми являются только те отрезки ломаных линий, которые принадлежат видимым граням обоих многогранников. Так, фронтальные проекции отрезков $1''3''$, $2''3''$, $4''6''$, $6''8''$ линий пересечения видимы. Отрезки $1''2''$, $4''7''$ принадлежат невидимой грани SAB пирамиды, отрезки $5''7''$, $5''8''$ расположены на невидимой грани EE_1F_1F призмы.

10.3. Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения многогранников?
2. В каком случае при пересечении многогранников получается проникание, врезание?
3. В чем заключается способ ребер и способ граней?
4. В какой последовательности соединяются точки пересечения ребер и граней многогранников?
5. Как определяется видимость линии пересечения многогранников?

Глава 11. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С МНОГОГРАННИКАМИ

11.1. Способы построения линии пересечения поверхностей

Линия пересечения многогранника с телом вращения в общем случае состоит из отдельных участков кривых линий, получающихся при пересечении граней многогранника с поверхностью вращения. Точки перехода от одного участка к другому находятся на пересечении ребер многогранника с телом вращения и называются точками излома. Участок линии пересечения может быть и прямой линией в случае пересечения линейчатой поверхности вращения гранью многогранника по образующей.

При проницании (полном пересечении) получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоскими (поверхность вращения пронизывает одну грань) или пространственными, состоящими из нескольких плоских кривых с точками излома в местах пересечения поверхности вращения ребрами многогранника.

При врезании (неполном пересечении) получается одна замкнутая пространственная линия.

Таким образом, в соответствии с указанным выше, задачи данной темы решаются по следующему плану:

- Определяются точки излома линии пересечения, являющиеся точками пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения.
- Находятся точки, принадлежащие линиям пересечения отдельных граней многогранника с телом вращения. При этом сначала следует найти характерные (опорные) точки кривых. Это точки, проекции которых отделяют видимую часть проекции линии пересечения от невидимой, а также это проекции наивысших и наинизших точек линии пересечения, ближайших и наиболее удаленных, крайних слева и справа на проекциях линии пересечения.
- Определение видимости линии пересечения поверхностей и их очерков. Видимость проекций участков линии пересечения определяется из условия расположения их на видимой стороне каждой поверхности.

При построении точек линии пересечения многогранников с телами вращения используют вспомогательные секущие плоскости. Их располагают так, чтобы они пересекали данные поверхности по простым для построения линиям (прямым или окружностям).

Рассмотрим построение линии пересечения поверхности прямой трехгранной призмы с поверхностью цилиндра вращения (рис. 11.1). Боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, а ось цилиндра перпендикулярна профильной плоскости проекций.

По горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеем проницание цилиндра призмой, и линия пересечения состоит из двух замкнутых симметричных частей (на рисунке приведены обозначения точек только одной ее части).

Грань призмы BB_1C_1C параллельна оси цилиндра и пересекает поверхность цилиндра по прямой 2–3 (образующая цилиндра).

Грани AA_1B_1B и AA_1C_1C наклонены к оси цилиндра и пересекают его поверхность по кривым (частям эллипсов).

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы, а профильная проекция совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 1, 2, 3 ребер призмы с поверхностью цилиндра (фронтальные проекции этих точек определяем с помощью линий связи, проведенных через их профильные проекции). Точки 4 и 5, находящиеся на верхней образующей цилиндра, разграничивают фронтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части (фронтальные проекции этих точек оп-

ределим с помощью линий связи, проведенных через соответствующие горизонтальные проекции).

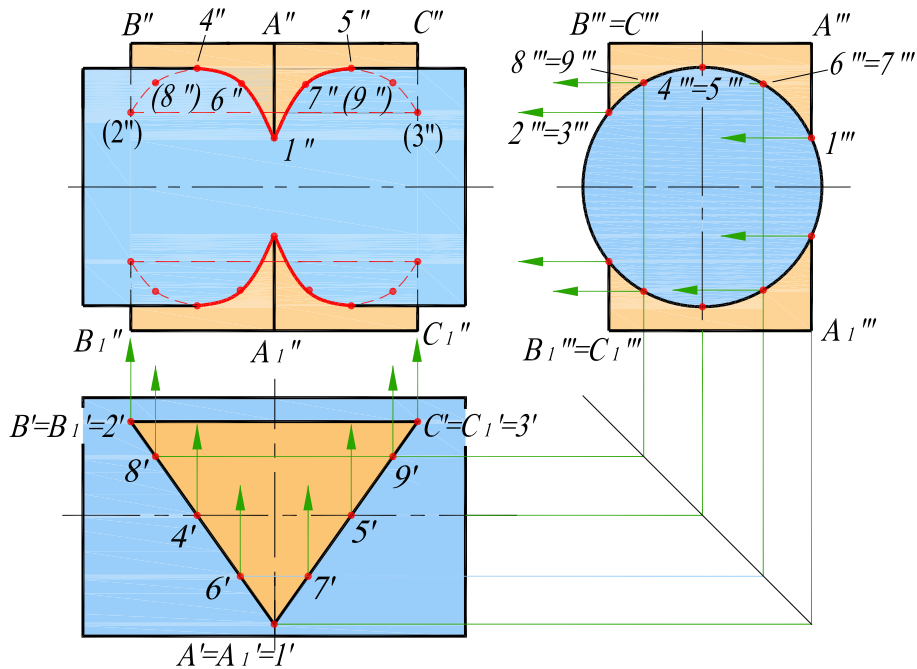


Рис. 11.1

Построение промежуточных точек 6, 7, 8, 9 выполняем следующим образом. На одной из имеющихся проекций линии пересечения (горизонтальной или профильной) намечаем проекции точек и с помощью линий связи строим недостающие проекции.

По построенным точкам проводим фронтальную проекцию линии пересечения. Видимой является часть $4''6''1''7''5''$, расположенная на видимой проекции цилиндра. Часть фронтальных проекций ребер BB_1 и CC_1 закрывается очерком цилиндра.

На рис. 11.2, а построена линия пересечения поверхности конуса вращения с поверхностью прямой четырехгранной призмы $ABCD A_1 B_1 F_1 D_1$. Боковые ребра призмы являются профильно-проецирующими прямыми, а ось конуса перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций.

Из профильной проекции видно, что имеет место врезание, так как ребро BB_1 призмы не пересекает конус. Линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную линию и состоит из четырех участков кривых второго порядка. Грань $AA_1 B_1 B$ пересекает боковую поверхность конуса по эллипсу, грань $BB_1 C_1 C$ – по гиперболе, грань $CC_1 D_1 D$ – по окружности, грань $AA_1 D_1 D$ – по параболе.

Профильная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 3, 7, 8 ребер призмы с поверхностью конуса. Для этого через ребра AA_1 , CC_1 , DD_1 проведены горизонтальные плоскости α (α'') и β (β''), пересекающие конус по окружностям (параллелям).

На рис 11.2, а приведено обозначение точек лишь одной симметричной части линии пересечения.

Плоскость β позволяет определить также дуги окружности, по которым грань $CC_1 D_1 D$ пересекает конус. Ребро BB_1 пересекает конус в точке 7, а ребро DD_1 – в точке 8.

Характерными точками эллипса, по которому плоскость грани $AA_1 B_1 B$ пересекает боковую поверхность конуса, являются точки 1, 2, M , L . Построение этих точек начинается с профильных проекций. Высшая M и низшая 1 определяют малую ось фронтальной проекции эллипса и большую ось горизонтальной. Середина (точка O) отрезка $M1$ является центром эллипса.

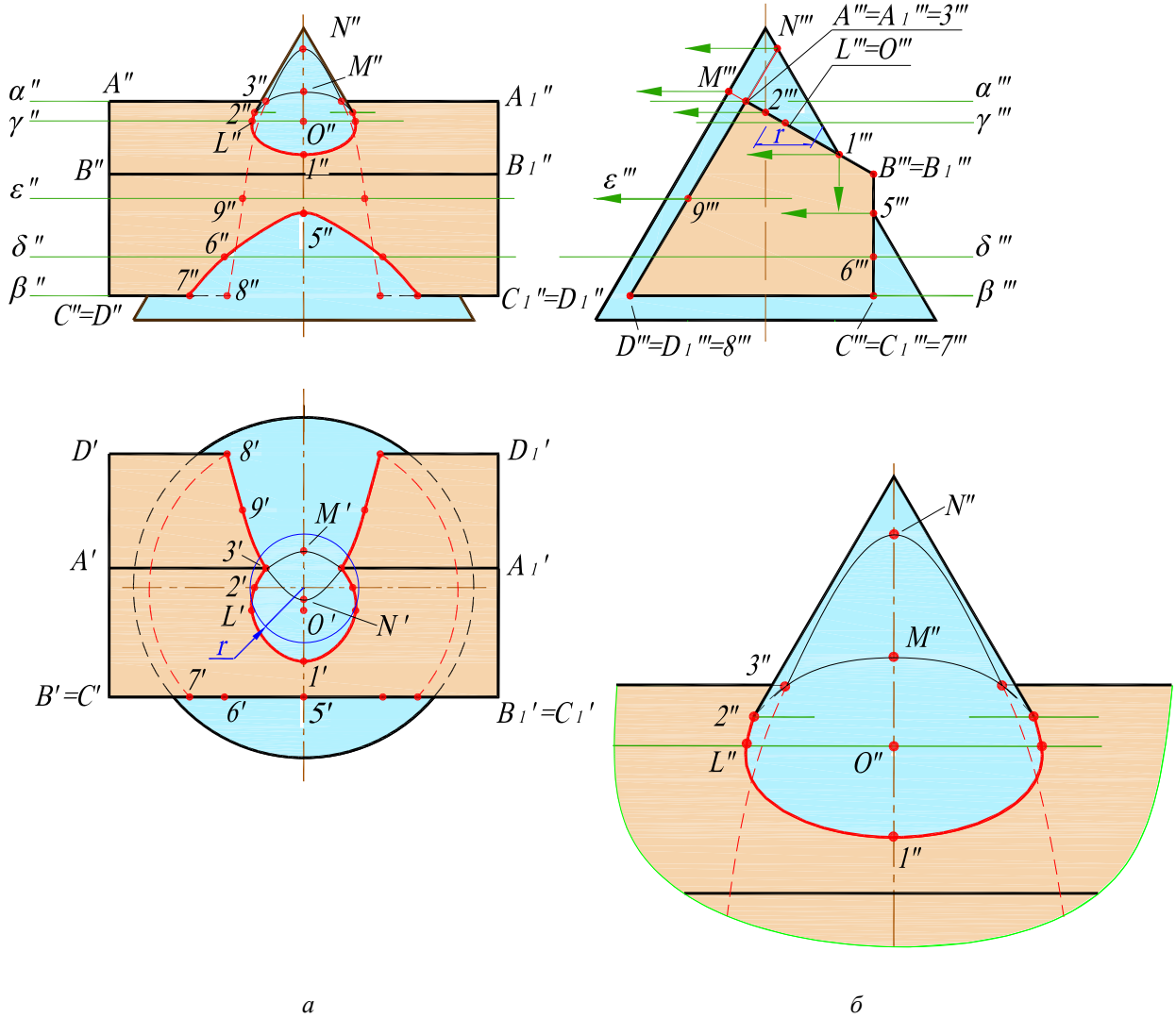


Рис. 11.2

С помощью горизонтальной плоскости γ (γ'' , γ''') проведенной через точку O (параллель радиуса r) находится точка L , определяющая малую ось горизонтальной проекции эллипса и большую ось фронтальной проекции. Проекция $2''$ точки 2, находящейся на фронтальной очерковой образующей конуса, разделяет фронтальную проекцию эллипса на видимую и невидимую.

Вершина гиперболы (точка 5), по которой грань BB_1C_1C пересекает поверхность конуса, определяется по профильной проекции $5'''$.

Построение точки 7, принадлежащей и гиперболе, и окружности, приведено выше. Промежуточная точка 6 построена с помощью горизонтальной плоскости δ (δ'' , δ'''), сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной.

Вершина параболы (точка N), по которой плоскость грани AA_1DD_1 пересекает поверхность конуса, находится за пределами грани и определяется по ее профильной проекции. Построение точек 3 и 8, принадлежащих параболе, а также эллипсу и окружности, приведены ранее. Промежуточная точка 9 определена сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной с помощью горизонтальной плоскости ε (ε'' , ε'''). Видимость проекций линии пересечения определяется видимостью граней призмы и поверхности конуса. Следует отметить, что часть ребра AA_1 на фронтальной проекции до точки 3 закрывается контуром конуса.

На рис. 11.2, б показано увеличенное изображение части фронтальной проекции.

На рис. 11.3 приведено построение линии пересечения сферы с прямой трехгранной призмой. Боковые ребра призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций.

Из горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проникание сферы призмой. Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы. Характерными точками линии пересечения являются точки 1 и 2 – точки пересечения ребер призмы со сферой (обозначение точек линии пересечения приведено лишь на одной симметричной части). Для построения этих точек использованы фронтальные плоскости α и β , проведенные через ребра призмы и пересекающие сферу по окружностям радиусов R и R_1 .

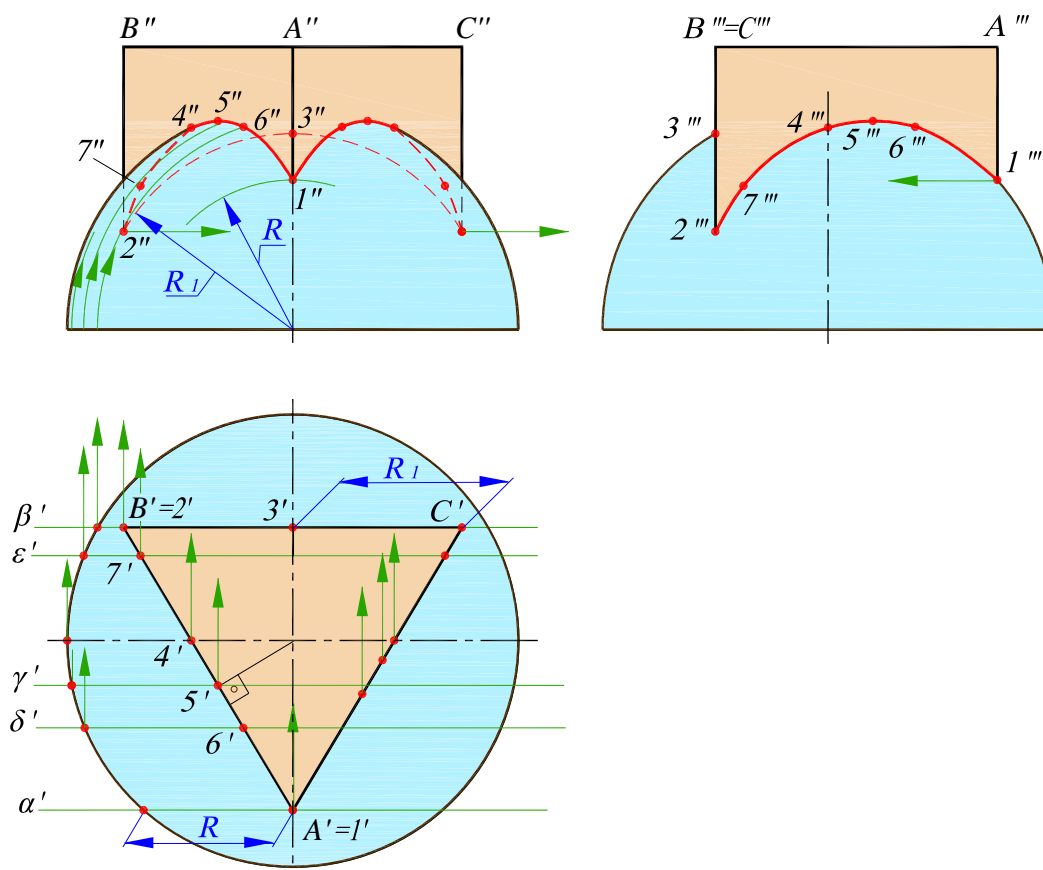


Рис. 11.3

Фронтальную проекцию $1''$ точки 1 можно определить и по профильной проекции с помощью линий связи. Так как грань BC является фронтальной плоскостью, то плоскость β (β') позволяет определить дугу окружности, по которой она пересекает сферу. Точка 3 – высшая точка этой дуги.

Грани AB и AC призмы пересекают сферу по дугам окружностей, которые на фронтальную и профильную плоскости проекций проецируются в виде частей эллипсов. Фронтальная проекция линии пересечения этих граней представляет собой две симметричные части, а профильные проекции совпадают.

Характерными точками фронтальной проекции линии пересечения являются также точки $4''$ и $5''$. Точка 4 разделяет линию на видимую и невидимую части, точка 5 – высшая точка линии пересечения. Проекция $4''$ находится на очерке сферы – фронтальном меридиане, проекция $5''$ определена с помощью фронтальной плоскости γ (γ').

Для построения промежуточных точек $6''$ и $7''$ фронтальной проекции использованы фронтальные плоскости δ (δ') и ϵ (ϵ'). Каждая из фронтальных плоскостей пересекает сферу по окружности определенного радиуса, а призму – по горизонтально-проецирующим прямым.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является часть эллипса $1''6''5''4''$, на профильной проекции симметричные части линии пересечения изображаются

видимой линией. На фронтальной проекции части ребер B и C закрываются контуром сферы.

11.2. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения поверхности тора с поверхностью трехгранной призмы (рис. 11.4).

Решение. Боковые грани призмы являются фронтально-проецирующими плоскостями, и фронтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы. Из фронтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проникание тора призмой (две замкнутые линии пересечения).

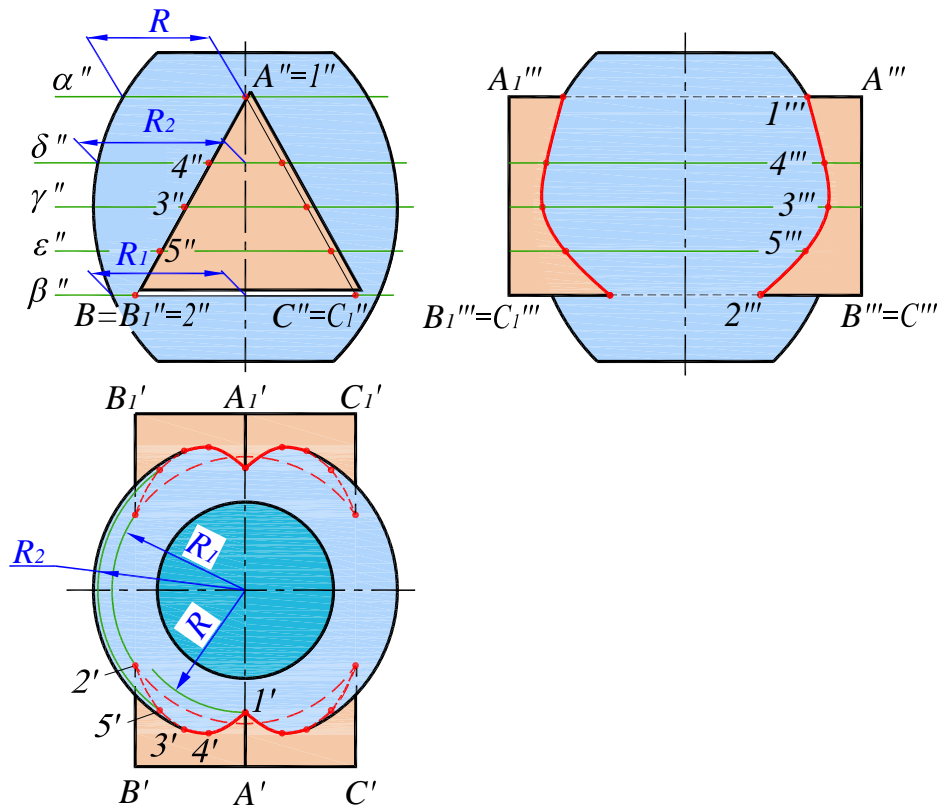


Рис. 11.4

Характерными точками линии пересечения являются точки 1, 2, 3 (обозначение точек линии пересечения приведено для одной симметричной части). Для построения горизонтальных проекций точек 1 и 2, в которых ребра призмы пересекают поверхность тора, использованы горизонтальные плоскости α (α'') и β (β''). Эти плоскости пересекают призму по фронтально-проецирующим прямым, а тор – по окружностям радиусов R и R_1 .

Плоскость β (β'') позволяет определить дугу окружности, по которой горизонтальная грань BB_1C_1C пересекает поверхность тора.

С помощью горизонтальной плоскости γ , пересекающей тор по экватору, определим горизонтальную проекцию точки 3. Проекция $3'$ разделяет горизонтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

Для нахождения горизонтальных проекций точек 4 и 5 использованы горизонтальные плоскости δ (δ'') и ϵ (ϵ''). Эти плоскости пересекают поверхность призмы по фронтально-проецирующим прямым, а тор – по окружностям одинакового радиуса R_2 .

Профильная проекция линии пересечения строится по точкам, определяемым с помощью линий связи.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является часть кривой $1'4'3'$, расположенная на верхней части тора и видимых гранях призмы. На профильной проекции симметричные части линии пересечения совпадают и изображаются видимой линией.

Задача 2. Построить линию пересечения правильной треугольной пирамиды и цилиндра вращения (рис. 11.5).

Решение. Из горизонтальной проекции видно, что в данном примере имеет место проникание цилиндром поверхности пирамиды. Одна часть линии пересечения состоит из трех плоских кривых (частей эллипсов), по которым грани пирамиды пересекают боковую поверхность цилиндра. Вторая часть линии пересечения вырождается в точку S , так как вершина пирамиды находится на верхнем основании цилиндра. Поскольку пирамида является правильной и ее высота совпадает с осью цилиндра, то все участки линии пересечения одинаковы.

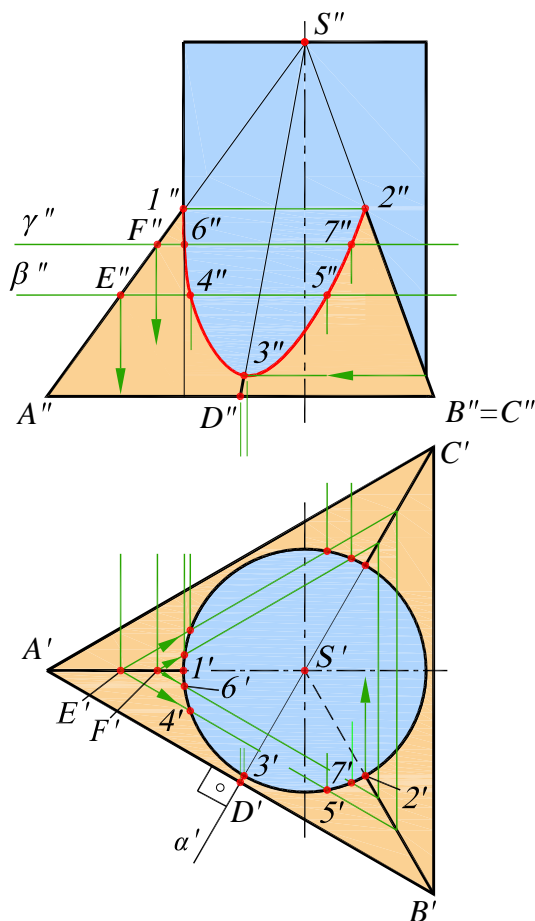


Рис. 11.5

Боковая поверхность цилиндра вращения – горизонтально-проецирующая, поэтому горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра.

Грани пирамиды SAB и SAC являются плоскостями общего положения с совпадающими фронтальными проекциями. Поэтому фронтальные проекции линии пересечения этих граней с цилиндром (части эллипсов) совпадают. Грань SBC является фронтально-проецирующей плоскостью, и фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией этой грани.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения ребер пирамиды с поверхностью цилиндра. Ребро SA пересекает очерковую образующую цилиндра в точке 1, так как ребро и образующая расположены в одной фронтальной плоскости. Фронтальные проекции точек пересечения ребер SB и SC с поверхностью цилиндра совпадают ($2''$) и находятся на одной горизонтальной прямой с проекцией $1''$. Фронтальная проекция точки 2 может быть построена и с помощью линии связи, проведенной из горизонтальной проекции $2'$.

К другим характерным точкам относятся низшие точки, в которых грани пирамиды пересекают поверхность цилиндра. Эти точки находятся с помощью вспомога-

тельных плоскостей, проходящих через ось цилиндра и пересекающих грани по линии наибольшего ската. Так, для построения фронтальной проекции точки 3 использована плоскость α (α'), пересекающая пирамиду по прямой SD , а цилиндр – по образующей. Проекция $3''$ находится на одной горизонтальной прямой с точкой пересечения фронтально-проецирующей грани SBC и очерковой образующей цилиндра.

Для нахождения фронтальных проекций промежуточных точек 4, 5, 6, 7 использованы горизонтальные плоскости β (β'') и γ (γ''), пересекающие цилиндр по окружностям, а пирамиду – по треугольникам. В пересечении их горизонтальных проекций получают горизонтальные проекции $4', 5', 6', 7'$ этих точек. Фронтальные проекции определяются с помощью линий связи на фронтальных проекциях вспомогательных плоскостей.

11.3. Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения тела вращения с многогранником?
2. Какие точки являются характерными при построении линии пересечения?
3. Как определяется видимость участков линии пересечения?

Глава 12 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Линия пересечения двух поверхностей вращения в общем случае представляет пространственную кривую, которая может распадаться на две и более части. Эти части могут быть, в частности, и плоскими кривыми, и даже прямыми линиями.

Линию пересечения поверхностей обычно строят по ее отдельным точкам. Точки подразделяются на характерные (опорные) и промежуточные (случайные).

Общим способом построения этих точек является способ *вспомогательных секущих поверхностей – посредников*. При пересечении данных поверхностей вспомогательной поверхностью определяются линии пересечения ее с данными поверхностями, в пересечении этих линий получают точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

Наиболее часто в качестве поверхностей-посредников применяются плоскости или сферы.

12.1. Способ вспомогательных секущих плоскостей

В качестве вспомогательных секущих плоскостей чаще всего используют плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций. Положение их выбирают такое, чтобы они пересекали заданные поверхности по простейшим линиям – прямым или окружностям.

Если одна из поверхностей является цилиндрической проецирующей поверхностью, то построение линии пересечения упрощается, так как в этом случае одна проекция линии пересечения совпадает с окружностью – проекцией цилиндра на перпендикулярную плоскость проекций.

На рис. 12.1, *a* показано построение линии пересечения двух цилиндров вращения, оси которых скрещиваются. Ось горизонтального цилиндра – профильно-проецирующая, а ось вертикального – горизонтально-проецирующая.

Линией пересечения цилиндров является пространственная кривая, горизонтальная проекция которой совпадает с окружностью – горизонтальной проекцией вертикального цилиндра. Отметим на этой окружности точки, принадлежащие линии пересечения: опорные 1, 2, 3, 4, лежащие на крайних образующих цилиндров, и промежуточную 5. Точки обозначены только на одной симметричной части линии пересечения.

Фронтальные проекции точек 1, 3, 3₁, лежащие на ближней, верхней и нижней образующих горизонтального цилиндра, определяем с помощью линий связи.

Для построения фронтальных проекций точек 2, 2₁, 4, 4₁, 5, 5₁ использованы вспомогательные фронтальные плоскости α (α'), β (β'), γ (γ'), пересекающие оба цилиндра по образующим. Положение образующих вертикального цилиндра найдем по их горизонтальным проекциям при помощи вертикальных линий связи. Для построения образующих горизонтального цилиндра использована его профильная проекция.

На рис. 12.1, б приведено наглядное изображение пересекающихся цилиндров и вспомогательная плоскость γ , используемая для построения промежуточных точек 5, 5₁.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является линия 2''5''1''5''2'', принадлежащая видимым частям обоих цилиндров.

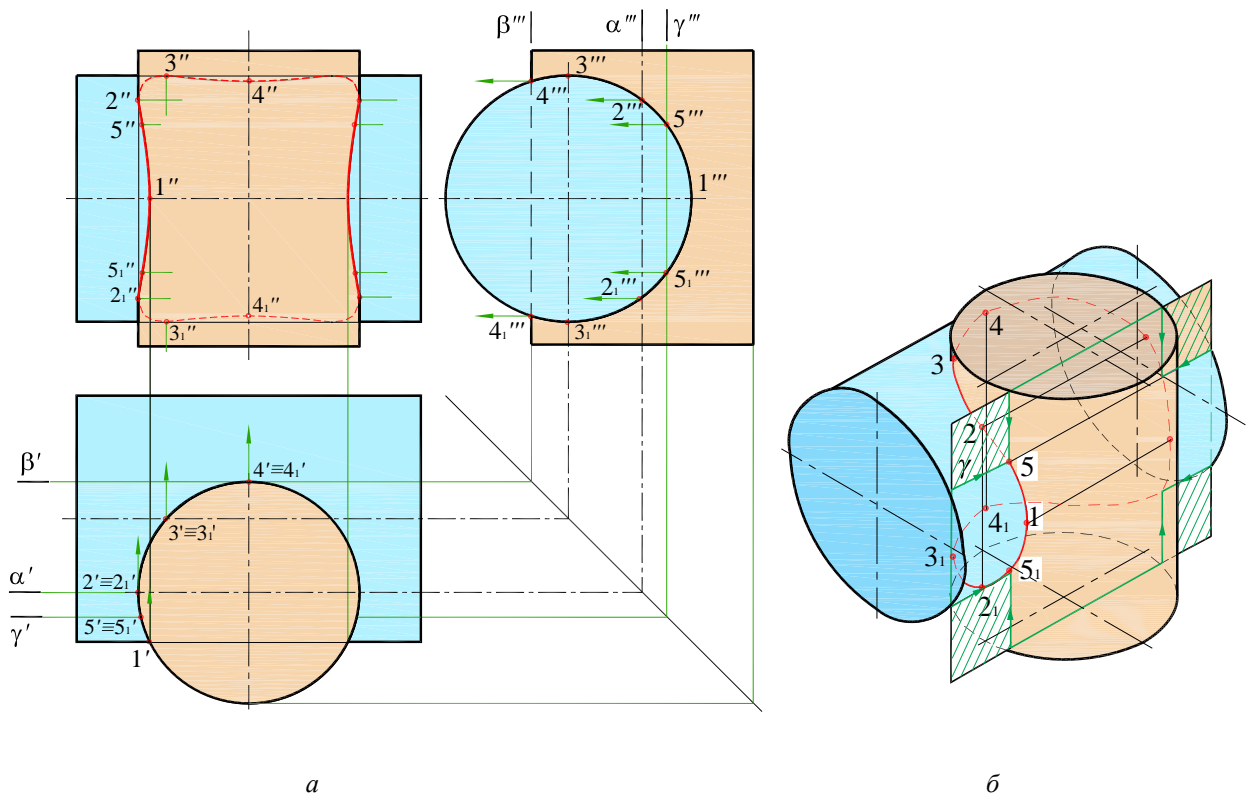


Рис.12.1

На рис.12.2, а показано построение линии пересечения конуса вращения и цилиндра вращения, у которых оси скрещиваются под прямым углом.

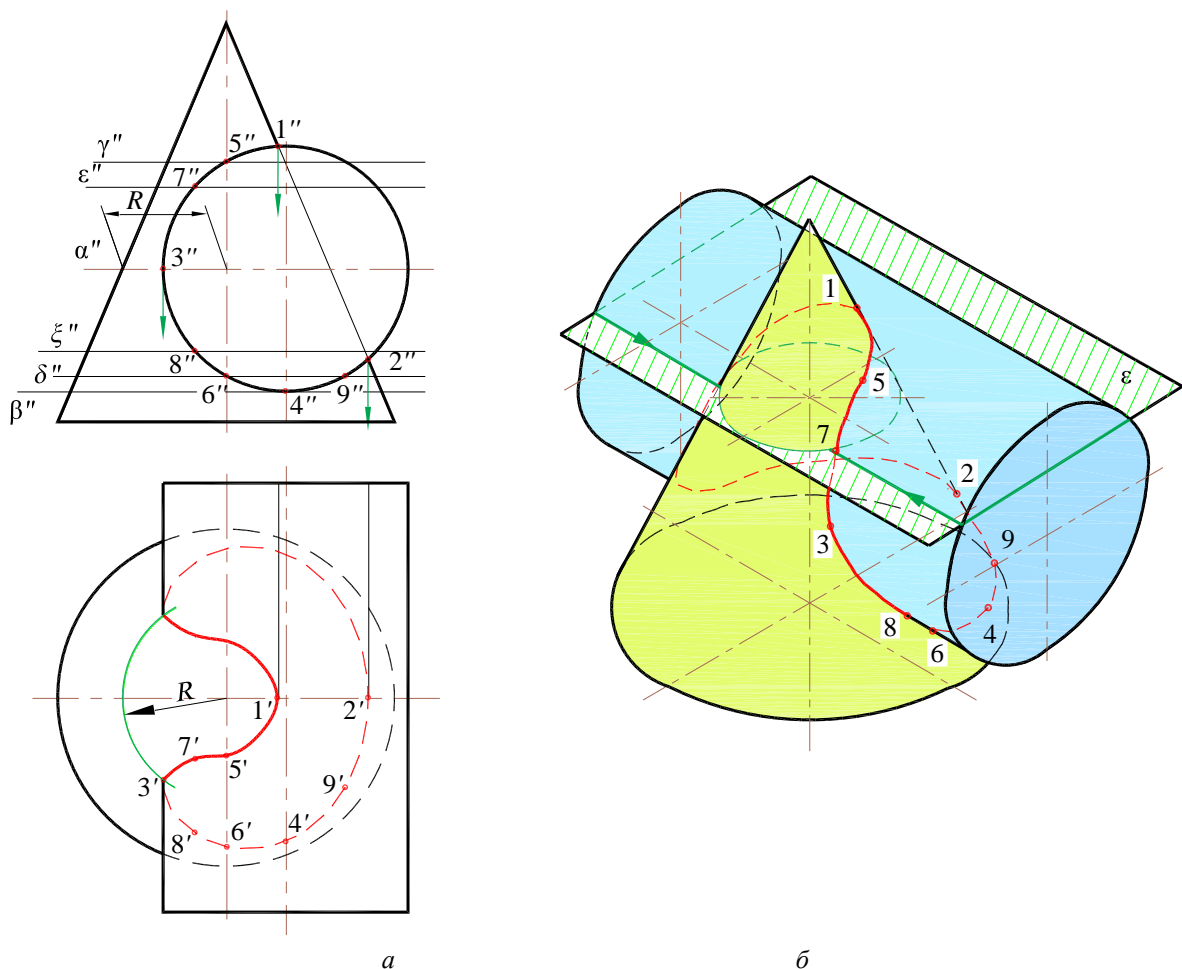


Рис.12.2

Линией пересечения указанных тел является пространственная кривая, фронтальная проекция которой совпадает с окружностью – фронтальной проекцией цилиндра. Отметим на этой окружности точки линии пересечения: опорные (1, 2, 3, 4, 5, 6) и промежуточные (7, 8, 9). Точки обозначены только на одной симметричной части линии пересечения. Горизонтальные проекции точек 1 и 2, лежащие на правой очерковой образующей конуса, определим с помощью линий связи. Для построения горизонтальных проекций точек 3 и 4 использованы вспомогательные плоскости α и β .

Плоскость α (α'') пересекает цилиндр по крайней левой образующей, а конус по окружности (параллели) радиуса R , пересечение которых определяет горизонтальную проекцию $3'$ точки 3.

Плоскость β (β''), касающаяся цилиндра по его нижней образующей и пересекающей конус по окружности соответствующего радиуса, позволяет построить горизонтальную проекцию $4'$ точки 4.

Подобным образом с помощью горизонтальных плоскостей γ , δ , ϵ и ξ находятся горизонтальные проекции точек 5 и 6, расположенных на ближней и дальней образующих конуса, а также горизонтальные проекции промежуточных точек 7, 8, 9.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является линия $1'5'7'3'$, принадлежащая видимой (верхней) части цилиндра.

На рис. 12.2, б приведено наглядное изображение взаимно пересекающихся цилиндра и конуса и вспомогательная плоскость ϵ , используемая для построения промежуточной точки 7.

На рис. 12.3, а показано построение линии пересечения полусферы с цилиндром вращения. Поскольку ось цилиндра перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с окружностью – гори-

горизонтальной проекцией цилиндра. Отметим на этой окружности опорные точки линии пересечения $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$ и промежуточные M, N, P .

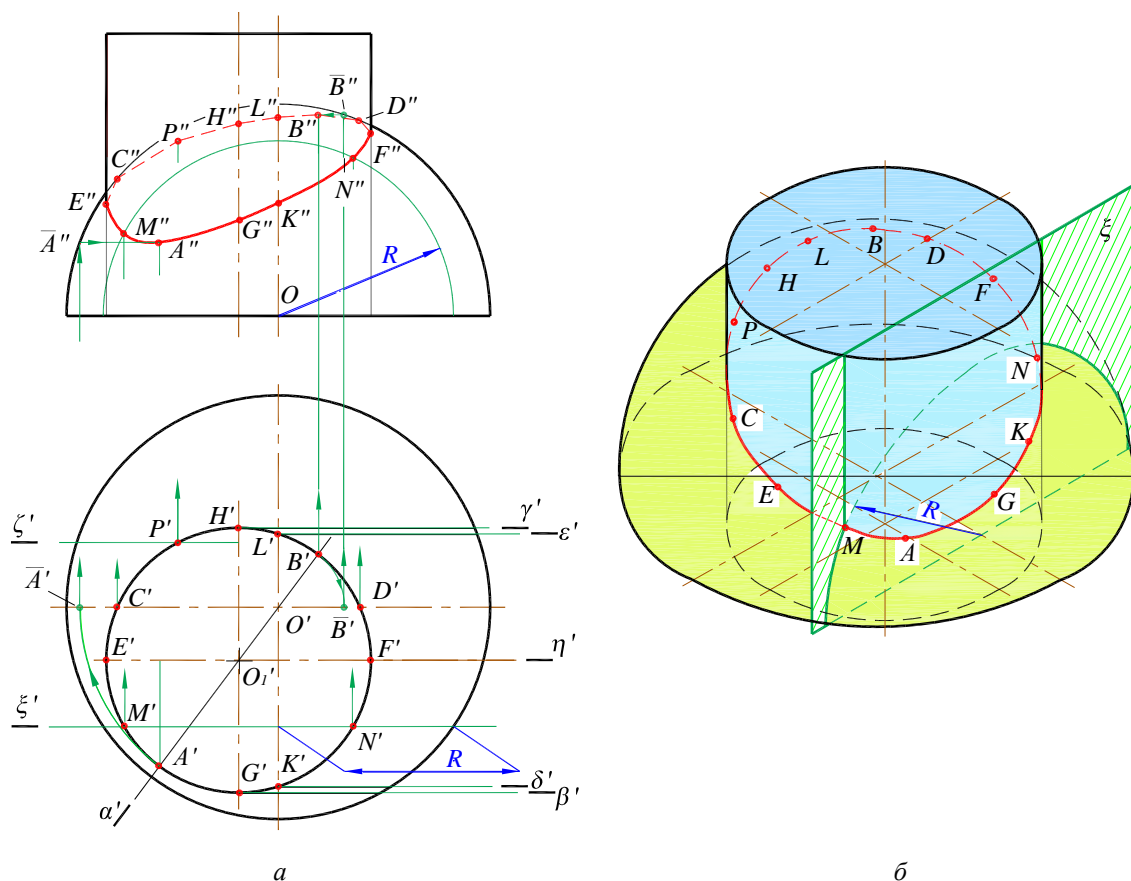


Рис.12.3

Точки A и B (низшая и высшая точки) расположены в горизонтально-проецирующей плоскости α , горизонтальный след-проекция α' которой пройдет через горизонтальные проекции O' и O_1' осей тел вращения. Чтобы определить фронтальные проекции A'' и B'' этих точек, повернем плоскость α с лежащими на ней линиями сечения сферы и цилиндра вокруг оси сферы до фронтального положения. Новое положение образующих цилиндра и контура сферы на плоскости проекций Π_2 дает точки \bar{A}'' и \bar{B}'' , по которым определяем проекции A'' и B'' .

Фронтальные проекции точек C и D , расположенных на фронтальном меридиане сферы, определим с помощью линий связи.

Для построения фронтальных проекций опорных точек E, F, G, H , размещенных на крайних образующих цилиндра, и точек K, L , находящихся на профильном меридиане сферы, использованы вспомогательные фронтальные плоскости β (β'), γ (γ'), δ (δ'), ϵ (ϵ'), η (η'). Фронтальные проекции промежуточных точек M, N, P построим с помощью фронтальных плоскостей ζ (ζ') и ξ (ξ'). Каждая из вспомогательных плоскостей пересекает (касается) цилиндр по образующим, а полусферу – по полуокружности. Так, вспомогательная плоскость ξ (ξ') пересекает цилиндр по соответствующим образующим, а полусферу – по дуге радиуса R . Пересечение фронтальных проекций указанных линий сечения и дает точки M'' и N'' .

Найденные фронтальные проекции опорных и промежуточных точек соединяем лекальной кривой, обводя точки в порядке их расположения на поверхности цилиндра.

Видимой частью фронтальных проекции является линия $E''M''A''G''K''N''F''$, принадлежащая видимой (передней) части цилиндра.

На рис. 12.3, б представлено наглядное изображение вспомогательной плоскости ξ , используемой для построения промежуточных точек M и N линии пересечения цилиндра и полусферы.

12.2. Особые случаи пересечения

При пересечении между собой кривых поверхностей линиями пересечения в общем случае являются пространственные кривые, которые в ряде случаев могут распадаться на более простые линии. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

1. Два цилиндра с параллельными осями и два конуса с общей вершиной пересекаются по образующим.

На рис. 12.4, а изображены пересекающиеся между собой цилиндры вращения с параллельными осями. Линиями пересечения являются общие образующие l_1 и l_2 .

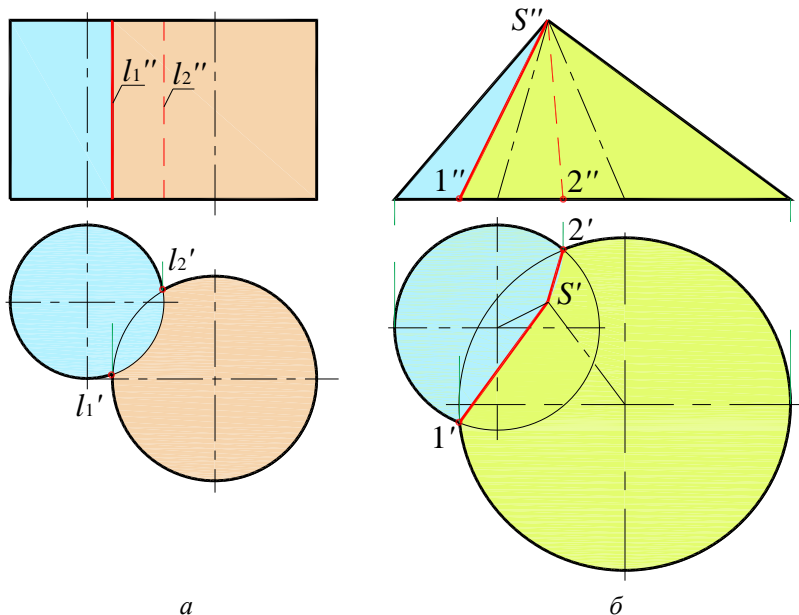


Рис.12.4

На рис. 12.4, б изображены пересекающиеся между собой наклонные конусы с круговыми основаниями и общей вершиной S . Линиями пересечения являются общие образующие $S1$ и $S2$.

2. Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

На рис. 12.5 изображены пересекающиеся между собой цилиндр и конус, касающиеся сферы радиуса R . Линии касания – окружности, плоскости которых параллельны фронтальной и профильной плоскостям проекций.

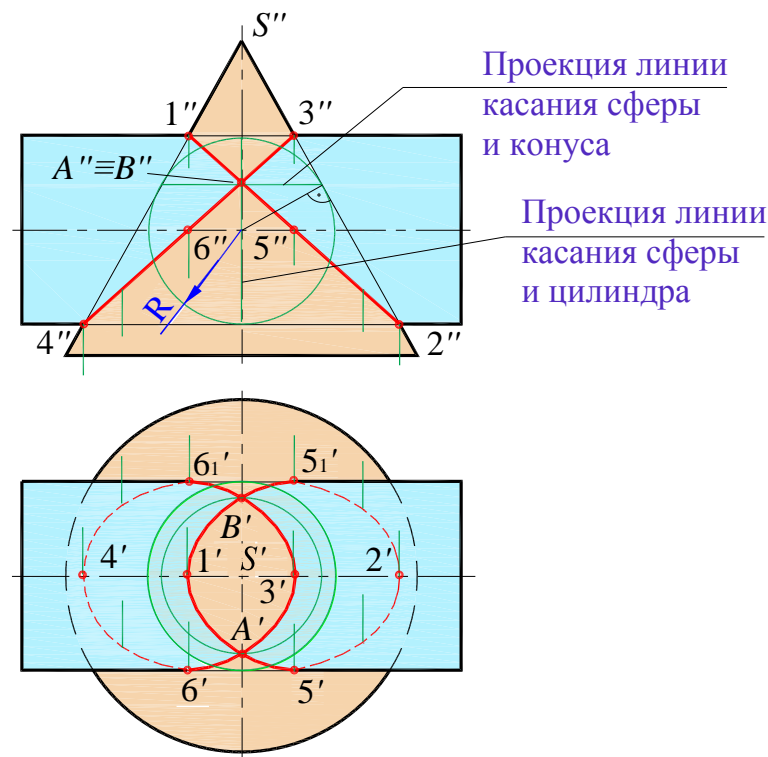


Рис. 12.5

Плоскости касания пересекаются между собой по фронтально-проецирующей прямой AB . Фронтальная проекция линии пересечения – два эллипса, плоскости которых проходят через прямую AB и являются фронтально-проецирующими плоскостями. Большие оси эллипсов – отрезки 1–2 и 3–4, а малые равны диаметру цилиндра. Горизонтальная проекция линии пересечения находится из условия принадлежности ее точек поверхности конуса.

3. *Соосные поверхности вращения (т. е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям.*

Если ось вращения соосных поверхностей перпендикулярна к какой-либо плоскости проекций, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде окружности, а на другую плоскость проекций – в прямую линию.

На рис. 12.6 даны примеры пересечения соосных поверхностей вращения (ось вращения перпендикулярна плоскости π_1). На рис. 12.6, *a* приведены цилиндр и конус, *б* – конус и сфера, *в* – две сферы, *г* – сфера и тор.

За ось сферы можно принять любой ее диаметр. Поэтому сфера, центр которой находится на оси поверхности вращения, пересекается с этой поверхностью по окружности.

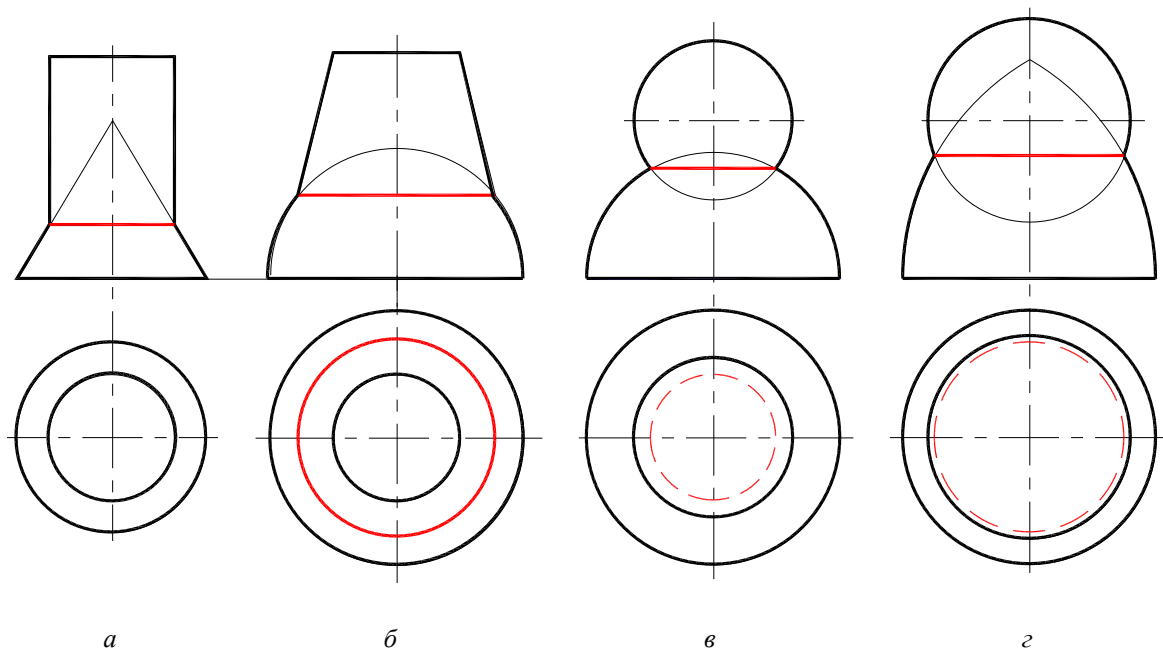


Рис.12.6

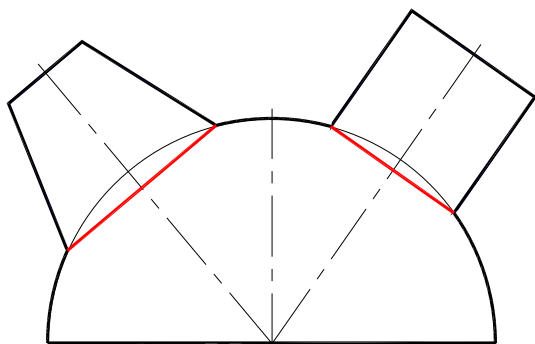


Рис. 12.7

На рис. 12.7 показана сфера, пересекающаяся с цилиндром и конусом, оси которых параллельны фронтальной плоскостью проекций.

Плоскости окружностей, по которым пересекаются поверхности вращения, перпендикулярны осям поверхностей вращения, вследствие чего окружности на фронтальную плоскость проекций проецируются в виде отрезков прямых линий.

12.3. Способ вспомогательных сфер

При построении линии пересечения поверхностей вращения не всегда удается подобрать секущие плоскости так, чтобы они пересекали поверхности по линиям, проекции которых были бы прямыми или окружностями. В некоторых таких случаях в качестве секущих поверхностей (посредников) целесообразно применять сферы. Этот способ основан на свойстве сферы пересекаться с любой поверхностью вращения, ось которой проходит через центр сферы, по окружности.

Чтобы сфера одновременно пересекала две поверхности по окружностям, проецирующимся в прямые линии, необходимо выполнить следующие условия:

- Оси поверхностей вращения должны пересекаться (точку пересечения принимают за центр вспомогательных концентрических сфер).
- Оси поверхностей вращения должны располагаться параллельно какой-либо плоскости проекций.

На рис.12.8 показано построение линии пересечения двух конусов с пересекающимися осями, параллельными плоскости π_2 .

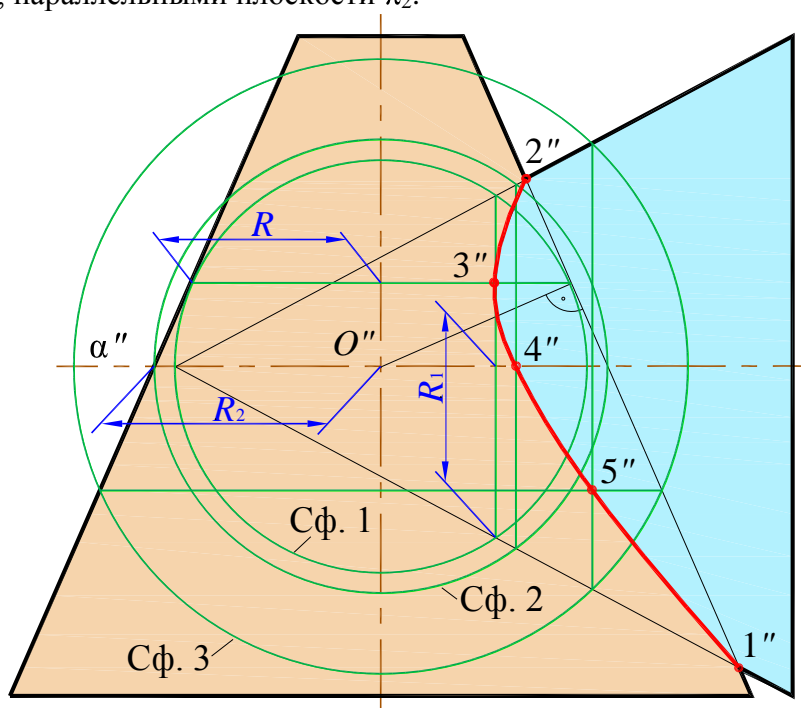


Рис. 12.8

Анализ графического условия показывает, что для решения задачи нельзя выбрать секущие плоскости, пересекающие поверхности по простым линиям (прямым или окружностям). Так, горизонтальные или профильные плоскости пересекают один конус по окружностям, а другой в общем случае пересекают по гиперболам. Вместе с тем в задаче выполняются все условия, позволяющие применить способ сфер.

Линия пересечения – пространственная кривая – симметрична относительно плоскости, образованной пересекающимися осями конусов. Фронтальные проекции симметричных половин совпадают и образуют кривую 2-го порядка. Точки 1 и 2, находящиеся в пересечении очерков конусов, очевидны. Остальные точки определены с помощью вспомогательных сфер с центром в точке O'' – точке пересечения осей конусов.

С помощью сферы Сф. 1 (наименьшей из всех возможных) построена крайняя левая точка фронтальной проекции линии пересечения. Эта сфера касается поверхности конуса с вертикальной осью по окружности радиуса R и пересекает другой конус по окружности радиуса R_1 . В пересечении этих окружностей получается фронтальная проекция 3''.

Для определения фронтальной проекции точки 4, расположенной на ближайшей образующей конуса с горизонтальной осью, использована сфера Сф. 2. Радиус этой сферы подобран так, чтобы окружность пересечения ее с поверхностью конуса с вертикальной осью лежала в плоскости α (α'').

С помощью сферы Сф. 3 определена фронтальная проекция 5'' точки 5. Радиус вспомогательных сфер не должен превышать отрезка $0''1''$, так как тогда получаются точки вне проекций конусов.

Применение способа сфер позволяет построить линию пересечения поверхностей вращения, пользуясь только одной проекцией.

12.4. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения поверхности конуса вращения и сферы (рис. 12.9).

Решение. Линия пересечения заданных поверхностей представляет собой пространственную кривую линию, имеющую фронтальную плоскость симметрии δ (δ'), образованную пересекающимися осями конуса и сферы.

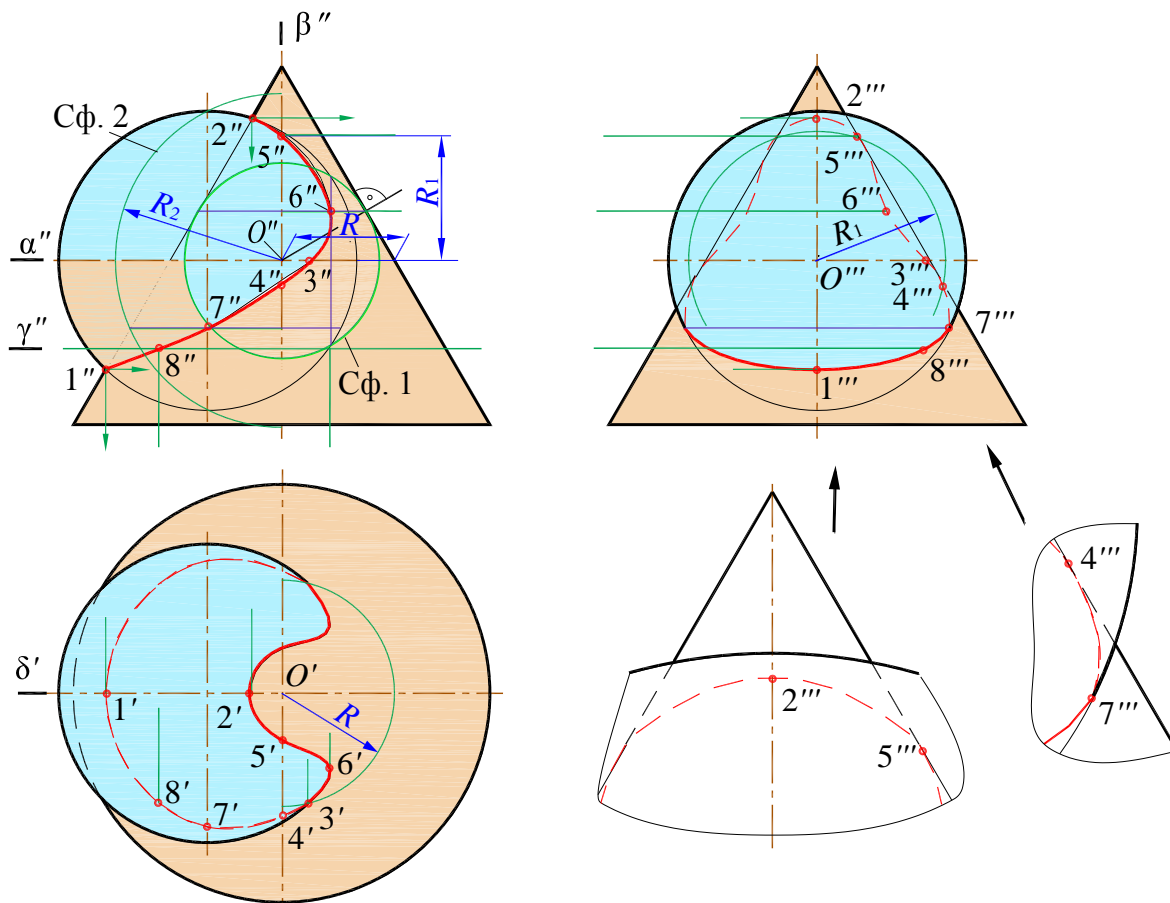


Рис. 12.9

Ее горизонтальная проекция симметрична относительно δ' , а фронтальные проекции симметричных половин совпадают (обозначение точек приведено лишь на одной симметричной половине кривой пересечения).

Точки 1 и 2, расположенные на очерках фронтальных проекций конуса и сферы, очевидны и определяются без дополнительных построений.

Точка 3 на экваторе сферы построена с помощью горизонтальной плоскости α (α''), пересекающей конус по окружности радиуса R . В пересечении горизонтальных проекций этой окружности и экватора сферы находится горизонтальная проекция 3'

точки 3. Фронтальную $3''$ и профильную $3'''$ проекции точки 3 определим с помощью линии связи. Точка 3 на горизонтальной проекции разделяет кривую на видимую и невидимую части.

Точки 4 и 5, расположенные на очерковых образующих профильной проекции конуса, определим с помощью профильной плоскости β (β''), пересекающей сферу по окружности радиуса R_1 . В пересечении профильных проекций этой окружности и очерковых образующих конуса находятся профильные проекции $4'''$ и $5'''$ точек 4 и 5.

С помощью линий связи определим фронтальные и горизонтальные проекции этих точек.

Так как пересекающиеся оси конуса и сферы образуют плоскость, параллельную плоскости π_2 , то наряду с секущими плоскостями можно применять и секущие сферы с центром в точке O . Так, для построения крайней правой точки кривой использована вспомогательная сфера Сф. 1, вписанная в конус (т. е. имеющая наименьший радиус). В пересечении фронтальной проекции окружности касания и фронтальной проекции окружности пересечения со сферой находится фронтальная проекция $6''$ точки 6.

Подобным образом определена точка 7, расположенная на профильном меридиане сферы. Радиус R_2 этой сферы взят таким, чтобы она пересекала сферу по профильному меридиану. Точка 7 на профильной проекции разделяет кривую на видимую и невидимую части.

Все построенные выше точки являются опорными.

Промежуточная точка 8 построена с помощью горизонтальной плоскости γ (γ'').

На рис. 12.9 также изображены в масштабе увеличения фрагменты профильной проекции.

Задача 2. Построить линию пересечения поверхности тора с цилиндром вращения (рис.12.10).

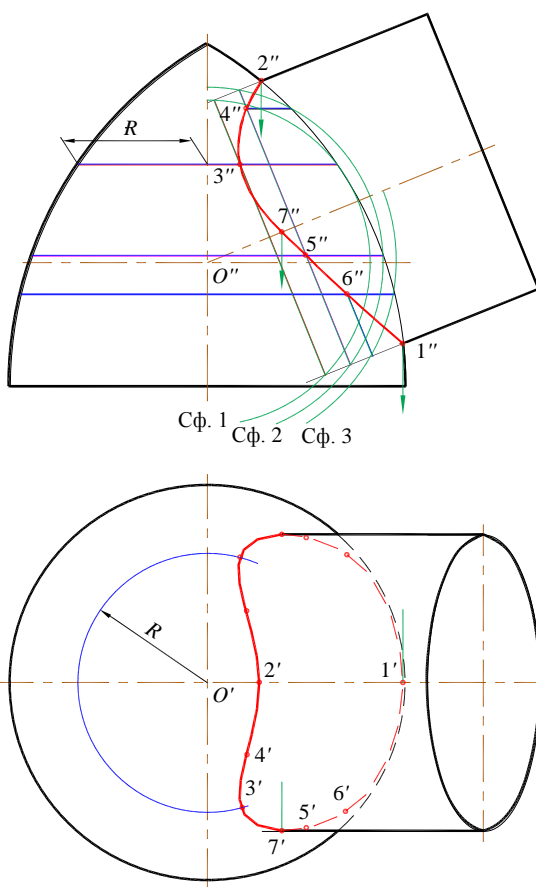


Рис. 12.10

Решение. Анализ графического условия задачи показывает, что применение способа вспомогательных секущих плоскостей в данном примере нерационально, потому что нельзя в общем случае подобрать секущие плоскости так, чтобы они пересекали заданные поверхности по простым линиям (прямым или окружностям).

Так как оси тора и цилиндра пересекаются и параллельны фронтальной плоскости проекций, то для решения задачи применим способ вспомогательных концентрических сфер с центром в точке O'' . Кривая линия пересечения симметрична относительно плоскости, образованной пересекающимися осями заданных поверхностей, а фронтальные проекции симметричных половин совпадают.

Точки 1 и 2, расположенные на пересечении очерков фронтальных проекций тора и цилиндра, очевидны.

С помощью сферы Сф. 1, вписанной в тор (т. е. имеющий наименьший радиус), построена фронтальная проекция точки 3 – крайней левой точки кривой пересечения. Вспомогательная сфера Сф. 1 касается поверхности тора по окружности радиуса R и пересекает поверхность цилиндра по окружности, определяемой точками пересечения образующих цилиндра сферой. В пересечении этих окружностей получается фронтальная проекция точки 3 (обозначение точек приведено лишь на симметричной половине кривой). С помощью вспомогательных сфер Сф. 2 и Сф. 3 построены фронтальные проекции точек 4, 5, 6.

Полученные фронтальные проекции точек соединяем плавной кривой и отмечаем точку $7''$ пересечения ее с осью цилиндра.

Горизонтальные проекции точек кривой пересечения построены из условия принадлежности их соответствующим параллелям (окружностям) тора. Так точка 3 находится на окружности радиуса R .

Горизонтальная проекция $7'$, расположенная на очерковой образующей цилиндра, разделяет проекцию кривой на видимую и невидимую части.

Эллипс – горизонтальная проекция основания цилиндра – построен по двум осям (рис. 12.10).

12.5. Вопросы для контроля

1. В чем заключается общий способ построения линии пересечения одной поверхности другою?
2. Как подбирают положение вспомогательных секущих плоскостей при пересечении поверхностей вращения?
3. Какие точки пересечения называются опорными (характерными)?
4. По каким линиям пересекаются между собой: а) цилиндры с параллельными осями; б) конусы с общей вершиной?
5. Какие линии получают при взаимном пересечении двух поверхностей вращения, описанных вокруг общей для них сферы или вписанных в сферу?
6. По каким линиям пересекаются между собой соосные поверхности вращения?
7. Какие условия должны быть выполнены для применения способа вспомогательных концентрических сфер?